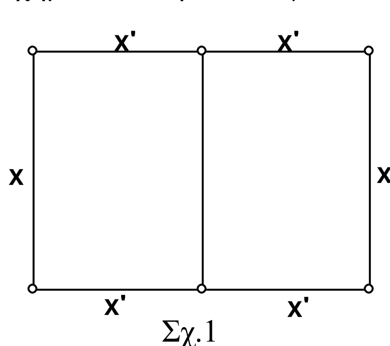
# ΕΦΑΡΜΟΖΟΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΕ ΕΝΑ ΦΥΛΛΟ ΧΑΡΤΙ $A_4$

***Γιάννης Π. Πλατάρος*** *, Καπετάν Κρόμπα 37, Τ.Κ. 242 00 ΜΕΣΣΗΝΗ*
*Ηλ. δ/ση: Plataros@sch.gr*

**Περίληψη:** *Στο πιο κοινό μέγεθος χαρτιού στον κόσμο , κρύβονται απροσδόκητα αρχαία μαθηματικά , τα οποία ανακαλύπτονται με «Γεωμετρία δια διπλώσεως» και τα οποία βασίζονται στο ότι το χαρτί $A_4$ διπλωνόμενο κατά μήκος παραμένει όμοιο προς εαυτόν όπως και στην «ανθυφαίρεση» του* $\sqrt{2}$ *με την μονάδα.*

**Εισαγωγή:** Η απαίτηση που έχομε από τα διάφορα μεγέθη χαρτιών φωτοτυπίας , είναι να είναι όμοια ορθογώνια παραλληλόγραμμα , έτσι ώστε κατά την σμίκρυνση ή μεγέθυνση, να υπάρχει πλήρης χρησιμοποίηση και του μήκους και του πλάτους . Η σμίκρυνση ή η μεγέθυνση είναι ομοιοθεσίες και θα πρέπει το ομοιόθετο ενός σήματος να χωρά ακριβώς στο μεγαλύτερο ή μικρότερο χαρτί. Επιπρόσθετα, για λόγους οικονομίας στην κοπή των χαρτιών, απαιτούμε ένα χαρτί διπλωνόμενο κατά μήκος, να παραμένει όμοιο προς εαυτόν . Αυτή η απαίτηση, μας οδηγεί στο παρακάτω σχήμα και στην αναλογία:



Σχ.1

$$\frac{2\chi'}{\chi}=\frac{\chi}{\chi'}\Leftrightarrow\frac{\chi^2}{\chi'^2}=2\quad(1)\ \Leftrightarrow\frac{\chi}{\chi'}=\sqrt{2}$$

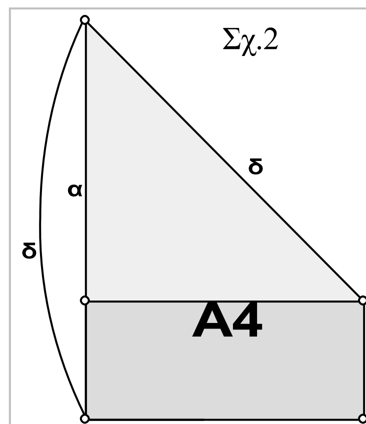
Σε κάθε νέα δίπλωση κατά μήκος (ή αντιστρόφως διπλασιασμό ) το νέο σχήμα διατηρείται όμοιο προς εαυτόν όπως φαίνεται στην ισότητα των λόγων:

$$...=\frac{8\chi'}{4\chi}=\frac{4\chi'}{2\chi}=\frac{2\chi'}{\chi}=\frac{\chi'}{\chi/2}=\frac{\chi'/2}{\chi/4}=...$$

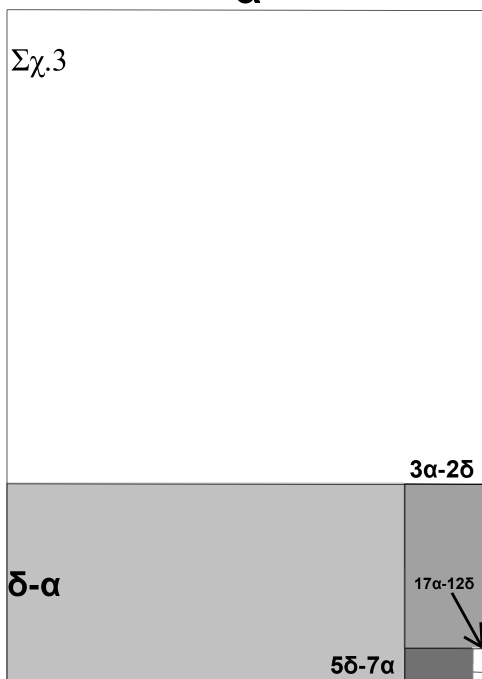
Έτσι, το διπλάσιο του φύλλου $A_4$ είναι το $A_3$ , το διπλάσιο του $A_2$ το μέγεθος $A_1$ . Αντιστρόφως, το ήμισυ του $A_4$ είναι το $A_5$ κ.ο.κ.

Στην μεγέθυνση μιας φωτοτυπίας $A_4$ σε $A_3$ εφαρμόζουμε μεγέθυνση $\sqrt{2}$ ($\approx$ 141%) και αντιστρόφως σε σμίκρυνση $A_3$ σε $A_4$ εφαρμόζουμε σμίκρυνση $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=(\approx 70,7\%)$

**Κατασκευή του $A_4$ :** Η σχέση (1) δείχνει λόγο πλευρών των οποίων τα τετράγωνα έχουν λόγο 2 . Αυτό παραπέμπει στον λόγο κάθετης και υποτείνουσας πλευράς σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ή ισοδυνάμως στην σχέση διαγωνίου προς την πλευρά τετραγώνου. Επομένως , αν κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο και λάβουμε την διαγώνιό του ως την άλλη πλευρά σε παραλληλόγραμμο, έχομε κατασκευάσει ένα όμοιο με το $A_4$ . Αν μάλιστα πάρουμε την μικρή πλευρά 210mm τότε η διαγώνιος θα είναι $\sqrt{2}\cdot 210mm \approx 297mm$. Ως επαλήθευση μπορεί κανείς να διπλώσει ένα χαρτί $A_4$ κατά την έννοια του διπλανού σχήματος σχηματίζοντας διπλωμένο τετράγωνο και να διαπιστώσει , με νέα δίπλωση, ότι η υποτείνουσα δ συμπίπτει με την μεγαλύτερη πλευρά του $A_4$.




**Η Ανθυφαίρεση του $A_4$ :** «*Ανθυφαίρεσις*» ή «*Ανταναίρεσις*» ή «*αμοιβαία αφαίρεσις*» , είναι ένας αρχαίος αλγόριθμος εύρεσης κοινού μέτρου (εφ΄ όσον υπάρχει) μεταξύ δύο (ομοειδών) μεγεθών . Στους ακεραίους αριθμούς, ο αλγόριθμος αυτός ταυτίζεται με την γνωστή μέθοδο του Ευκλείδους εξαγωγής Μ.Κ.Δ. , μεταξύ δύο αριθμών. Οι ακέραιοι έχουν πάντα κοινό μέτρο την μονάδα, ο σχετικός αλγόριθμος περατούται πάντα και άρα η σχέση μεταξύ δύο ακεραίων είναι ρητή. Αν όμως τα βήματα του αλγορίθμου συνεχίζονται επ΄ άπειρον, αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει κοινό μέτρο μεταξύ των μεγεθών και ότι η σχέση τους είναι άρρητη *(«Στοιχεία» Ευκλείδους, Βιβλίο Χ , πρόταση 2 )*




<u>Περιγράφουμε τα βήματα του αλγορίθμου στο διπλανό σχήμα:</u>

(i.) το α , χωρά στο δ , 1 φορά και περισσεύει δ-α <α

(ii.) Το δ-α , χωρά στο α , 2 φορές και περισσεύει 3α-2δ<δ-α.
(iii.)Το 3α-2δ , χωρά στο δ-α , 2 φορές και περισσεύει 5δ-7α<3α-2δ
(iv.)Το 5δ-7α , χωρά στο 3α –2δ , 2 φορές και περισσεύει 17α –12δ<5δ-7α
(v.)Το 17α –12δ , χωρά στο 5δ-7α , 2 φορές και περισσεύει 29δ-41α< 17α – 12δ

Η Διαδικασία αυτή εκ πρώτης όψεως δεν ξέρουμε αν περατούται ή συνεχίζεται επ΄ άπειρον. Με διπλώσεις είναι πρακτικώς αδύνατον να ξεπεράσουμε το τέταρτο βήμα του αλγορίθμου , ενώ με αλγεβρικούς υπολογισμούς χρειάζεται να κάνουμε συνεχώς δοκιμές πράγμα που συνεχώς δυσκολεύει. Συνεπώς , για να αποφανθούμε για το άπειρο ή πεπερασμένο του αλγορίθμου, χρειαζόμαστε ένα κριτήριο , το οποίο υπάρχει και πληρούται για την συγκεκριμένη περίπτωση. Λέγεται **«κριτήριο λόγου»** και θα δούμε πώς εφαρμόζεται. Παρατηρούμε, ότι $\frac{\delta-\alpha}{\alpha}=\frac{3\alpha-2\delta}{\delta-\alpha}(\Leftrightarrow 2\alpha^2=\delta^2 \; \pi o \upsilon \; \iota \sigma \chi \acute{\upsilon} \varepsilon \iota)$. **Αυτό σημαίνει, ότι η ανθυφαιρετική σχέση από το βήμα (ii) έως το βήμα (iii) θα επαναλαμβάνεται η ίδια ,** δηλ. το τμήμα της με το ψηφίο 2. *(**«κριτήριο λόγου»**)* Με τις ιδιότητες των αναλογιών μπορούμε να το δούμε και ως εξής:

$$\frac{\delta-\alpha}{\alpha}=\frac{3\alpha-2\delta}{\delta-\alpha}=\frac{(\delta-\alpha)-2(3\alpha-2\delta)}{\alpha-2(\delta-\alpha)}=\frac{5\delta-7\alpha}{3\alpha-2\delta}=....=...=...$$

Αυτή η διαδικασία δίνει τα διαδοχικά υπόλοιπα του αλγορίθμου επ΄ άπειρον.
Έτσι, η ανθυφαιρετική σχέση πλευράς προς διαγώνιο δίνεται απ΄την σχέση:
Ανθφ(δ,α) =[1,2,2,2,2,2,2,….] η οποία είναι περιοδική με περίοδο το 2 και ουσιαστικά δίνει μια απόδειξη της αρρητότητας του $\sqrt{2}$ .
Σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα , η αρχαία αλγοριθμική διαδικασία παριστάνεται από το συνεχές κλάσμα:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}}}=\kappa$$

Το κ υπάρχει και είναι το $\sqrt{2}$ (δηλ. ο άρρητος λόγος $\frac{\delta}{\alpha}$ ) και μπορεί να το διαπιστώσει κάποιος με αλγεβρικό χειρισμό (γνωρίζοντας όμως απαραιτήτως ότι το συνεχές κλάσμα συγκλίνει σε πραγματικό) ως εξής:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}=\kappa-1 \Leftrightarrow 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}=\frac{1}{\kappa-1}\Leftrightarrow$$

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}=\frac{1}{\kappa-1}-2 \Leftrightarrow \kappa-1=\frac{1}{\kappa-1}-2 \Leftrightarrow \kappa=\pm\sqrt{2} \; \mu\varepsilon \; \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \; \tau\eta\nu \; \sqrt{2}$$

**Πλευρικοί και διαμετρικοί αριθμοί:** Οι Αριθμοί που εμφανίζονται ως συντελεστές στα δ και α λέγονται «πλευρικοί» και «διαμετρικοί» αριθμοί αντιστοίχως , έχουν μελετηθεί από τους Πυθαγορείους και αναφορές σε αυτούς έχομε από τον Θέωνα τον Σμυρνέα (42-45)από τον Ιάμβλιχο στα Σχόλια εις Νικόμαχον τον Γερασινό. (91-93) , από τον Πλάτωνα στην Πολιτεία (546b) και από τον Πρόκλο στα σχόλιά του στην Πολιτεία του Πλάτωνος. Οι αριθμοί αυτοί έχουν τις εξής ιδιότητες:

Α) Είναι μέλη δύο ακολουθιών που ορίζονται με διπλό αναδρομικό τύπο, ως εξής:

$\alpha_0 = 1$ , $\delta_0 = 1$ , $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \delta_\nu$ (1) *και* $\delta_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + \delta_\nu$ (2) . Οι πρώτοι 9 όροι των ακολουθιών είναι:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ : | 1 | 2 | 5 | 12 | 29 | 70 | 169 | 408 | 985 | …… |
| $\{\delta_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ : | 1 | 3 | 7 | 17 | 41 | 99 | 239 | 577 | 1393 | ……. |

Β) Οι ακολουθίες συνδέονται με την λίαν ενδιαφέρουσα σχέση $2\alpha_\nu^2 - \delta_\nu^2 = (-1)^\nu \forall \nu \in \mathbb{N}$ (3) Πράγματι, αν υψώσουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη των (1) και (2) διπλασιάσουμε την πρώτη σχέση και αφαιρέσουμε κατά μέλη θα καταλήξουμε στην σχέση $2\alpha_{\nu+1}^2 - \delta_{\nu+1}^2 = -(2\alpha_\nu^2 - \delta_\nu^2) = -(-1)^\nu = (-1)^{\nu+1}$ . Μάλιστα ο Πρόκλος (2.27.1-2.29.4) , αποδεικνύει την (3) κάνοντας χρήση της προτάσεως ΙΙ.10 των Στοιχείων του Ευκλείδους («***γλαφυρόν θεώρημα***») Το εξαιρετικά ενδιαφέρον είναι, ότι σύμφωνα με τους Van der Waerden Στυλιανό Νεγρεπόντη κ.ά. πρέπει να θεωρηθεί βέβαιον, ότι ο Ευκλείδης εγνώριζε την μέθοδο απόδειξης της τελείας επαγωγής. Ο Van der Waerden μάλιστα ισχυρίζεται, ότι ήταν γνωστή στους Πυθαγορείους καθώς και τον Ζήνωνα τον Ελεάτη ($5^{ος}$ αιώνας π.Χ.) . Τα επιχειρήματα είναι αρκετά και το κύριο των οποίων εστιάζεται στο ότι η πρόταση ΙΙ.10 αφ΄ ενός έχει μια εξαιρετικά εξεζητημένη ειδική διατύπωση και αφ΄ ετέρου δεν εφαρμόζεται πουθενά αλλού στα «Στοιχεία». Όμως, η ΙΙ.10 , συνιστά την απόδειξη της (3) στο βήμα «αποδεικνύω για ν= κ+1» της επαγωγικής μεθόδου.

Επίσης η (3) ισοδυναμεί με την σχέση $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu} = \sqrt{2 - \frac{(-1)^\nu}{\alpha_\nu^2}}$ (4) η οποία ορίζει μια νέα ακολουθία ρητών αριθμών που συγκλίνει στο $\sqrt{2}$ . Μάλιστα όπως φαίνεται στο β΄μέλος της (4) , έχομε όρους που είναι διαδοχικές προσεγγίσεις εναλλάξ κατ΄ έλλειψιν και καθ΄ υπεροχήν του $\sqrt{2}$ και

μάλιστα με σημαντική ταχύτητα. Παραστατικότερα αυτό φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

| $\delta_\nu/\alpha_\nu$ | 1 | 1,5 | 1,4 | 1,416 | 1,413 | 1,4142 | 1,41420 | 1,414215 | 1,4142131 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{2}$ =1.4142135623730950488016887242096980785696718753769481… | | | | | | | | | |

Επίσης ισχύει: $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}=\dfrac{5}{7}$, $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}}=\dfrac{12}{17}$ *κ.ο.κ.*

Σήμερα η (3) είναι μια μορφή της «*εξίσωσης του Pell*» που έχει θεμελιακή θέση στην θεωρία αριθμών. Ακόμα η $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ λέγεται «*ακολουθία Pell*» καθώς και η $\{\delta_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ που είναι μια γενικότερη περίπτωσή της. Οι «*αριθμοί Pell*» συνδέονται με τους «*αριθμούς Lucas*» και με τους «*αριθμούς Fibonacci* » για κάθε περίπτωση των οποίων έχομε έναν απίστευτο όγκο παγκόσμιας βιβλιογραφίας . Σήμερα γνωρίζουμε ότι και για τις δύο ακολουθίες$\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $\{\delta_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ ισχύει ο ίδιος αναδρομικός τύπος : $\alpha_{\nu+2}=2\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu$, απ΄ όπου με την βοήθεια της χαρακτηριστικής εξίσωσης, μπορούμε να υπολογίσουμε και τους γενικούς όρους , για την περίπτωσή μας:

$$\alpha_\nu=\frac{(1+\sqrt{2})^\nu-(1-\sqrt{2})^\nu}{2\sqrt{2}},\forall\nu\in\mathbb{N} \text{ και } \delta_\nu=\frac{(1+\sqrt{2})^\nu+(1-\sqrt{2})^\nu}{2},\forall\nu\in\mathbb{N}$$

Δύο σχέσεις που συνδέουν τις ακολουθίες και που συνδέεται και με την ανθυφαίρεση, είναι η $\delta_\nu-\sqrt{2}\alpha_\nu=(-1)^\nu(\sqrt{2}-1)^\nu$ , $\forall\nu\in\mathbb{N}$ και $\delta_\nu+\sqrt{2}\alpha_\nu=(\sqrt{2}+1)^\nu$ , $\forall\nu\in\mathbb{N}$ οι οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη δίνουν την θεμελιώδη σχέση (3)

Μια γενική ανθυφαιρετική σχέση που συνδέει πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς, είναι η ανθφ( $\alpha_\nu-\delta_\nu\sqrt{2},1)=[2\delta_\nu,2\delta_\nu,2\delta_\nu,2\delta_\nu,2\delta_\nu,....]$

**Σειρές:** Απ ΄το σχήμα 3 , φαίνεται, ότι αν προσθέσω το εμβαδόν του πρώτου τετραγώνου και τα εμβαδά των απείρων ορθογωνίων που δημιουργούνται με την ανθυφαίρεση, θα πάρω το εμβαδόν του $A_4$. Δηλ.:

$$\alpha^2+2(\delta-\alpha)^2+2(3\alpha-2\delta)^2+2(5\delta-7\alpha)^2+2(17\alpha-12\delta)^2+2(29\delta-41\alpha)^2+....=\alpha\delta$$

ή $\alpha^2+2\sum_{\kappa=0}^{\infty}[(-1)^\kappa\alpha_\kappa\delta+(-1)^{\kappa+1}\delta_\kappa\alpha]^2=\alpha\delta$ . (5)

Επίσης, αν προσθέσουμε όλα τα μήκη των απείρων ορθογωνίων κατά την οριζόντια διεύθυνση έχομε το άπειρο άθροισμα ίσο με α Δηλ.

$$2(\delta-\alpha)+2(5\delta-7\alpha)+2(29\delta-41\alpha)+....=\alpha \text{ ή } 2\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\alpha_{2\kappa}\delta-\delta_{2\kappa}\alpha)=\alpha \ (6)$$

Επίσης το άθροισμα όλων των μηκών των απείρων ορθογωνίων κατά την κατακόρυφη έννοια, είναι δ-α , δηλαδή:

$$2(3\alpha-2\delta)+2(17\alpha-12\delta)+2(99\alpha-70\delta)+...=\delta-\alpha \quad \text{ή}$$

$2\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\delta_{2\kappa+1}\alpha-\alpha_{2\kappa+1}\delta)=\delta-\alpha$ (7) Οι ισότητες (6) και (7) , με πρόσθεση κατά μέλη , δίνουν το άθροισμα όλων των μηκών των απείρων ορθογωνίων:

$$2\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\delta_{2\kappa+1}\alpha-\alpha_{2\kappa+1}\delta)+2\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\alpha_{2\kappa}\delta-\delta_{2\kappa}\alpha)=\delta-\alpha+\alpha \Leftrightarrow$$

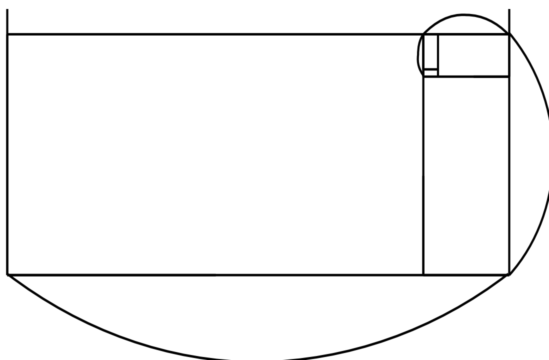
$$2[\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\delta_{2\kappa+1}\alpha-\alpha_{2\kappa+1}\delta)+\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\alpha_{2\kappa}\delta-\delta_{2\kappa}\alpha)]=\delta \Leftrightarrow$$

$$2\sum_{\kappa=0}^{\infty}[(-1)^{\kappa}\alpha_{\kappa}\delta+(-1)^{\kappa+1}\delta_{\kappa}\alpha]=\delta$$

Σε όλα τα ανωτέρω, μπορεί ο αναγνώστης να θεωρεί α=1 και δ= $\sqrt{2}$ .

Επειδή η σύγκλιση των σειρών παρουσιάζεται εποπτικά, μπορεί να δικαιολογηθεί και θεωρητικά με αρχαίο κριτήριο σύγκλισης των «Στοιχείων» του Ευκλείδους την περίφημη «μέθοδο εξαντλήσεως» *(Χ.1)* σύμφωνα με την οποία, αν από ένα μέγεθος αποκοπεί τμήμα μεγαλύτερο του ημίσεως και από το εναπομένον αποκοπεί τμήμα πάλι μεγαλύτερο του ημίσεως και αυτό γίνεται συνεχώς, τότε μετά από πεπερασμένα βήματα, το εναπομένον, μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό. Το κριτήριο πληρούται τόσο για τα «αποκοπτόμενα ορθογώνια» από το $A_4$ , όσο και για τα «αποκοπτόμενα μήκη» των ορθογωνίων.

**Καμπύλες:** Αν τα προκύπτοντα ορθογώνια κατά την ανθυφαίρεση τα διατάξουμε με κυκλική φορά, κάνοντας τις διαιρέσεις από τα αριστερά προς τα δεξιά και από κάτω προς τα πάνω, τότε οι κορυφές των ορθογωνίων ευρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **εσώστρεφος ηλιοτροπική,** επειδή οι σπόροι του ηλιοτροπίου είναι



τοποθετημένοι στο άνθος του σύμφωνα με μια τέτοια καμπύλη , η οποία έχει άμεση σχέση και με τους αριθμούς Fibonacci.

**Συμπεράσματα:** Για άλλη μια φορά φαίνεται, ότι τα μαθηματικά είναι «εφαρμοζόμενα» σε κάθε πτυχή του επιστητού αλλά και της καθημερινότητας , είναι μπροστά στα μάτια μας και μοιάζουν με «λαχείο ξυστό» Το μόνο που χρειάζεται είναι να ξύσουμε για να αποκαλυφθούν. Το αν θα είναι και εφαρμοσμένα εξαρτάται από την «τύχη» μας και βεβαίως από τις ανθρώπινες ανάγκες μας

**Βιβλιογραφική αναφορά:**

1) Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος «Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά» στο Παν. Αθηνών ,χειμερινό εξάμηνο 2001-02 διδάσκων Στυλιανός Νεγρεπόντης .
2) Ευάγγελου Σ. Σταμάτη «Ευκλείδους Στοιχεία» τ. Ι, ΙΙ , ΙΙΙ. Ο.ΕΔ.Β
3) Ευκλείδη Στοιχεία τ. 2 , έκδοση Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. Αθήνα 2001
4)Εξαρχάκου Θεοδώρου «Η αρχαία Ελλάδα κοιτίδα της μαθηματικής σκέψης» Πρακτικά 17ου Συνεδρίου ΕΜΕ Αθήνα 2000.
5) http://mathworld.wolfram.com/PellNumber.html
6) http://users.tellurian.net/hsejar/maths/pell/
7) http://numbers.computation.free.fr/Constants/Sqrt2/sqrt2.html

**Abstract:** In the most common size of paper in the world, there are included hidden ancient mathematics, which can be discovered with the «Geometry though folding». These are based in the fact that the paper folded in length remains similar to itself, as well as in the «anthyphaeresis» of $\sqrt{2}$ with the unit